HOJA DE EJERCICIOS 6
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea A una matriz $n \times n$. Se define $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $g(x) = f(Ax)$. Calcula la matriz hessiana de g, así como su determinante.

Problema 2. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $a = (3, 2, -1)$. Se sabe que:

$$f(a) = 6 \quad , \quad Df_a = [0 \ \ 0 \ \ 0] \quad , \quad \mathrm{Hess}(f)_a = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

(a) Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a.
(b) Di, razonadamente, si a es máximo local de f, mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Problema 3. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto indicado:
(a) $f(x, y) = e^{x+y^2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{1-y}$ en el punto $(0, 0)$.
(b) $f(x, y) = x^4 + y^2 + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

Problema 4. Estudia los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6\,x^2\,y^2 + 8\,x^3$.
Indicación: estudia el comportamiento de $h(x) = f(x, x)$ para $|x|$ pequeño.
Demuestra que f tiene un mínimo global, pero no un máximo global.

Problema 5. Estudia los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - y^3$ ¿Tiene algún mínimo local? ¿Tiene algún máximo local? ¿Tiene mínimo global?¿Tiene máximo global?

Problema 6. Demuestra que la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(xy) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x^2 + y^4 \ ,$$

alcanza su valor mínimo y calcula los puntos donde lo alcanza. ¿Alcanza un valor máximo?

Problema 7. Dada una constante $c > 0$, consideramos la función:

$$f : (0, +\infty)^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x_1, \ldots, x_n) \ = \ x_1 \cdots x_n + c^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) .$$

(a) Comprueba que f tiene un único punto crítico a. Calcula explícitamente a y $f(a)$.
(b) Demuestra que si $|x_j| \le c/(n+2)$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $f(x) > f(a)$.
(c) Demuestra que si $|x_1|, \ldots, |x_n| \ge c/(n+2)$ entonces $f(x) > \mathrm{cte} \cdot \|x\|_\infty$. Deduce que $f(a)$ es el valor mínimo de f en todo su dominio.
Indicación: hazlo primero para $n = 2$, ayudándote de un dibujo en el cuadrante $(0, +\infty)^2$.

Problema 8. Fijados puntos $p_1, \ldots p_k \in \mathbb{R}^n$, determina $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la expresión $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \|x - p_i\|_2^2$ sea lo más pequeña posible.

Problema 9. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Dadas funciones $f : U \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con h estrictamente creciente, se define $G = h \circ f$.

a) Prueba que los máximos y mínimos locales son los mismos para f y G.

b) ¿Qué ocurre si h es estrictamente decreciente?

c) Halla los máximos y mínimos locales de $G : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x, y) = e^{34x[(\log x)^2 + y^2]}$.

d) Supongamos que f es diferenciable en $a \in U$ y h es derivable en $c = f(a)$ con $h'(c) \neq 0$. Prueba que el punto a es crítico para G si y sólo si lo es para f.

Problema 10. Para cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y el correspondiente conjunto E que se dan, demuestra que hay un único punto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a) = a$, y que de hecho $a \in E$. Describe un procedimiento para calcular a con dos decimales de precisión.

Indicación: puede ser de ayuda el apartado (b) del problema 12 de la Hoja 1.

(a) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3}\cos y + 2\ ,\ \dfrac{1}{6}\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} y - 1 \right)$, $E = \{|x-2| \leq 1, |y+1| \leq 1\}$.

(b) $f(x,y) = \left(\dfrac{xe^y}{40}\ ,\ 1 + \dfrac{x^2 + 2\cos y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y-1| \leq 1\}$.

(c) $f(x,y) = \left(2 + \dfrac{\cos(xy)}{7}\ ,\ \dfrac{x^2+y^3}{20} \right)$, $E = \{|x-2|, |y| \leq 1\}$.

(d) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{5}\operatorname{sen} y + \dfrac{z}{5}\ ,\ 1 + \dfrac{\cos(x+z)}{3}\ ,\ \dfrac{xz}{10} + \dfrac{1}{2} \right)$, $E = \{|x|, |y-1|, |z| \leq 1\}$.

(e) $f(x,y) = \left(\dfrac{e^{x/3}}{4} + \dfrac{y^2}{10}\ ,\ \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2 y}{10} \right)$, $E = \{|x|, |y| \leq 1\}$.

Problema 11. Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que A es contractiva en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ pero no lo es en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
Indicación: puede ser de ayuda el problema 12 de la Hoja 1.

Problema 12. En este ejercicio exploramos lo que pasa al debilitar alguna hipótesis del teorema de la aplicación contractiva.

a) (Espacio completo, $K = 1$). Da un ejemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sin punto fijo, pero que cumpla $|f(x') - f(x)| = |x' - x|$ para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}$ (nótese que necesariamente f es continua).

b) (Espacio compacto, $K = 1$). Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad. Da un ejemplo de una $f : C \to C$ sin punto fijo, pero que cumpla $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|$ para cualesquiera $p, q \in C$.

c) (Espacio no completo). Da un ejemplo de una $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ contractiva pero sin punto fijo.

d) (Dominio y codominio distintos). Explica por qué ninguna aplicación $f : [-1,1] \to [2,4]$ puede tener puntos fijos. Da un ejemplo de una tal f que cumpla $|f(x') - f(x)| = (1/2)\,|x' - x|$ para cualesquiera $x, x' \in [-1,1]$.

e) (Dominio y codominio distintos como espacios métricos). Consideramos en $\mathbb{R}$ las distancias $d(x,y) = |x-y|$, $d'(x,y) = |x-y|/2$. Exhibe una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sin puntos fijos pero tal que $d'\big(f(x), f(x')\big) = (1/2)\, d(x,x')$, es decir que tenemos una aplicación $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d')$ que es de Lipschitz con constante $1/2$ pero sin puntos fijos.

Problema 13. Estudia alrededor de qué puntos tienen inversa diferenciable los cambios a cilíndricas y esféricas:

$$\begin{cases} x(r,\varphi,h) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi,h) &= r\operatorname{sen}\varphi \\ z(r,\varphi,h) &= h, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(r,\theta,\phi) &= r\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ y(r,\theta,\phi) &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z(r,\theta,\phi) &= r\cos\phi. \end{cases}$$

Problema 14. Elige una inversa local del cambio a polares $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$, definida alrededor del punto $x = 2$, $y = -2\sqrt{3}$. Calcula la matriz jacobiana en este punto de la inversa local elegida.